

análisis de

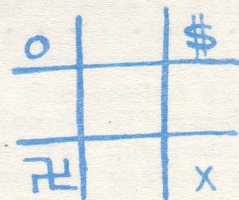
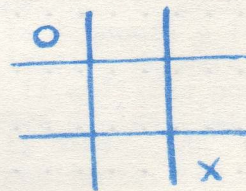
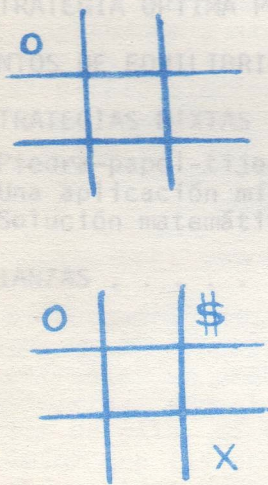
INDICE

estrategias

a través de

juegos

INTRODUCCIÓN	3
QUE ES UNA ESTRATEGIA?	4
ESTRATEGIA OPTIMA	4
ESTRATEGIA MINIMAX	17
El dilema del prisionero	17
El juego de las tres cartas	18
ESTRATEGIA OPTIMA POSIBLE	20
PUNTOS DE EQUILIBRIO	21
ESTRATEGIAS MIXTAS	23
Teoría de juegos	23
Una aplicación militar	26
Solución matemática a "pares" y "noes"	26
ALABRZAS	28



germán mariño

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

QUÉ ES UNA ESTRATEGÍA?	5
ESTRATEGIA ÓPTIMA	6
El problema de las pintas	16
ESTRATEGIA MINIMAX	19
El dilema del prisionero	19
El juego de las tres cartas	20
ESTRATEGIA ÓPTIMA POSIBLE	21
PUNTOS DE EQUILIBRIO	22
ESTRATEGIAS MIXTAS	24
Piedra – papel - tijeras	24
Una aplicación militar	26
Solución matemática a “pares” y “nones”	27
ALIANZAS	29

INTRODUCCIÓN

“¿Quiere decirme, por favor, qué camino debo tomar desde aquí?”

“Eso depende mucho de donde quieras ir”, dijo el gato.

“No me importa mucho”, dijo Alicia.

“Entonces es indiferente por el camino que vayas”

Lewis Carral, Alicia en el País de las Maravillas.

A partir de la Segunda Guerra Mundial los estrategas militares comienzan a utilizar la teoría de los juegos para analizar y planificar las acciones bélicas. Cuántas divisiones y cuántos aviones deberían enviarse para disminuir al máximo las posibles pérdidas?Cuál es la estrategia con la cual aumentan las posibilidades de ganar una batalla? Como los modelos matemáticos de la teoría de juegos donde existen dos "jugadores" con intereses contrarios y donde generalmente lo que ganaba uno lo perdía el otro, eran relativamente semejantes a las situaciones planteadas por la guerra, los estados mayores lograban obtener algunos elementos de juicio objetivos para tomar decisiones. La guerra como un juego!

El análisis temático de las “competencias” poco a poco fue extrapolándose a otros campos como la economía y la política; hoy día la utilizan desde la investigación de mercado hasta las predicciones electorales. Y decimos la utilizan porque hasta ahora es un instrumento que está en manos de las clases dominantes, las cuales las usan para optimizar la dominación. Los sectores oprimidos seguimos trabajando artesanalmente, con las uñas, dejándole... a la burguesía la tecnología unas veces por nuestras mis mas dificultades de acceso a las universidades y otras, por asumir posiciones simplistas y sectáreas frente a ella.

El concepto fundamental que está detrás de la teoría de los juegos es el concepto de ESTRATEGIA. Qué camino es el mejor para enfrentar un problema, con qué tipo de alianzas ganaríamos más fuerzas, son algunas de las preguntas que podemos abordar a partir de ella. La idea de que siempre es posible hallar una ruta mejor que las otras, que nos permite maximizar nuestro plan, no es una idea reaccionaria. Acaso en el socialismo no debemos lograr desarrollar al máximo las fuerzas productivas y los procesos de producción? Lo que pasa es que el capitalismo para de finir cuál es la ruta óptima pasa por encima de los intereses sociales, busca la ruta óptima en función de los intereses de los dueños de los medios de producción. Pero eso no significa que el concepto de optimización deba ser rechazado por los grupos que trabajan en la lucha de liberación. Si así fuera estaríamos haciendo lo mismo que los obreros ingleses durante el inicio de la revolución industrial, rompiendo las máquinas de tejido automáticas, como si el enemigo fuese la máquina.

Ciertamente no estamos sosteniendo que los modelos de la teoría de juegos simulen estrictamente las contradicciones de la realidad. La realidad es infinitamente más compleja; sin embargo, con ellos es posible obtener algunos elementos para mejorar la planificación de nuestras acciones.

La teoría de los juegos se desarrolla en base a técnicas matemáticas que aunque simples, están generalmente por encima de la formación matemática de la gran mayoría de los grupos de Dase; por esa razón este libro solo introducirá matemáticas elementales pretendiendo con ello que pueda ser utilizado por amplios sectores.

El lector no encontrará aquí nada parecido a lo que se llama dinámicas de grupos, connotación que quizá pueda sugerir la palabra juego. No se trata de jugar para mejorar las relaciones humanas o analizar el comportamiento de un grupo, los juegos planteados son básicamente para trabajar los diferentes tipos de estrategias.

Dentro de los temas tratados se encuentran: concepto de estrategia, estrategia óptima, estrategia óptima posible, estrategia minimax, puntos de equilibrio y estrategia mixta. Algunos de los juegos enunciados son juegos de 2 grupos, de suma cero y de información perfecta, otros son juegos de 2 grupos, suma cero e información incompleta. También se incluyen juegos de 3.



QUE ES UNA ESTRATEGIA?

Antes de contestar esta pregunta vamos a realizar un juego.

El juego de los (9) fósforos. Este persigue que el contendor se vea obligado a coger siempre el último fósforo. La única regla consiste en que los jugadores deben coger (1), (2), ó (3) fósforos cada vez que les toque el turno. Por ejemplo, el primer jugador coge 2 fósforos, a continuación el segundo jugador coge 1, en seguida nuevamente el primer jugador coge 3.... etc. Además, debe cumplirse una condición, que salga de primeras el otro jugador. En síntesis, debo buscar qué hay que hacer todas las veces para ganar independientemente de las decisiones de mi oponente.

JUEGUELO

Ya descubrió cómo ganar siempre? Analicemos el juego. Supongamos que mi oponente, que llamaré (B), coge (1) fósforo. Entonces yo cogeré (3), quedando (5) fósforos sobre la mesa. En esas condiciones si (B) coge (1) fósforo, yo cogeré (3) y le tocará a él coger el último; si (B) coge (2), yo cogeré (2), ganando nuevamente y si (B) coge (3), yo cogeré (1), volviendo a ganar. Retomemos la situación desde cuando quedan 5 fósforos.

Primer caso

Hay (5) fósforos.

Si B saca (1) quedan (4).

Entonces, si yo cojo (2), queda (1) y pierde B.

Segundo caso

Hay (5) fósforos.

Si B saca (2), quedan (3).

Entonces, si yo cojo (2), queda (1) y pierde B.

Tercer caso

Hay 5 fósforos.

Si B saca (3), quedan (2).

Entonces, si yo cojo (1), queda (1) y pierde B.

Ya hemos visto que: Si quedan 5 fósforos y le toca el turno a mi oponente, yo puedo lograr ganar siempre restando (1) del número de fósforos que quedan sobre la mesa.

Si quedan (4), entonces yo deberé coger ($4 - 1 = 3$), es decir (3).

Si quedan (3), entonces yo deberé coger ($3 - 1 = 2$).

Si quedan (2), entonces deberé coger ($2 - 1 = 1$).

Pero todavía no está resuelto el problema pues debo encontrar cómo lograr siempre dejarle 5 fósforos a mi oponente. Para hacerlo basta con proceder de una forma similar a la anterior.

Veámoslo:

Hay (9) fósforos; si B saca uno (1), quedan (8); entonces yo debo restar del número de fósforos que quedan sobre la mesa un número tal que haga que queden 5 fósforos, es decir ($8 - 5 = 3$). Si B saca (2), quedarán (7) y entonces yo deberé sacar ($7 - 5 = 2$). Si B saca 3, quedarán (6) y entonces yo deberé sacar ($6 - 5 = 1$).

Ahora bien, cuando encuentro un camino para que mi oponente siempre pierda, se dice que ha encontrado la estrategia para ganar. Es decir, he encontrado una manera para resolver el juego problema a mi favor. Esta estrategia es completamente independiente de lo que haga mi oponente; no importa las jugadas que realice, la estrategia que use, siempre ganaré.

En la vida real, aunque teóricamente para cualquier problema existe una estrategia, ésta no siempre es posible de encontrar y más aún, si logro hacerlo, no siempre, ni siquiera en el campo matemático, todas las estrategias me permiten ganar independientemente de lo que haga el otro jugador.

En síntesis, tomando la definición de Elena Venttsel, profesora de matemáticas de la Academia de la Fuerza Aérea Soviética, “por estrategia del jugador se entiende el conjunto de reglas que determina las elecciones para todas las situaciones que se presentan en el juego”.

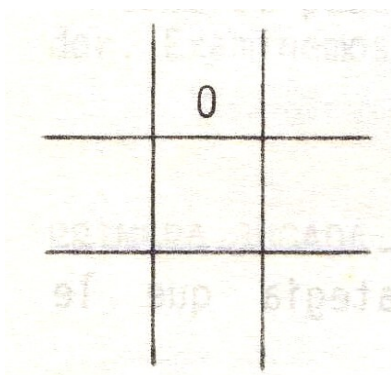
ESTRATEGIA ÓPTIMA

EL TRIKY

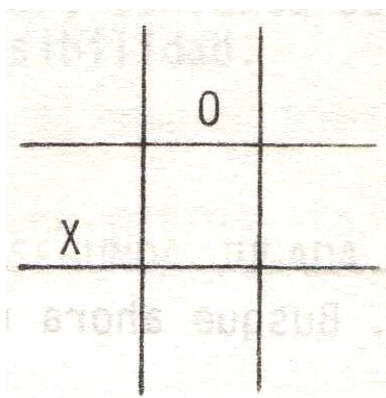
Antes de presentar teóricamente el concepto de estrategia óptima vamos a trabajar un juego a partir del cual esperamos que usted infiera dicho concepto. Se trata de un juego muy popular conocido en Colombia como TRIKY. Consta de nueve casillas las cuales deben ser llenadas alternativamente por cada uno de los jugadores ganando aquel que logre ubicar (3) de sus marcas en diagonal o línea recta. Veamos un ejemplo:

Marca del jugador A = 0
Marca del jugador B = X

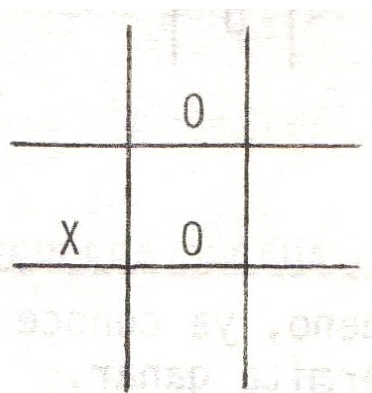
PRIMERA JUGADA



SEGUNDA JUGADA

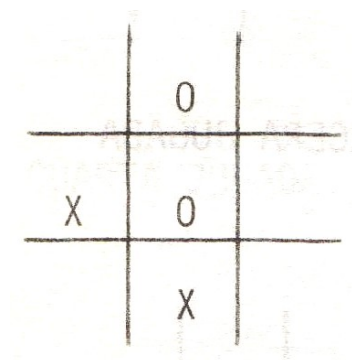


TERCERA JUGADA



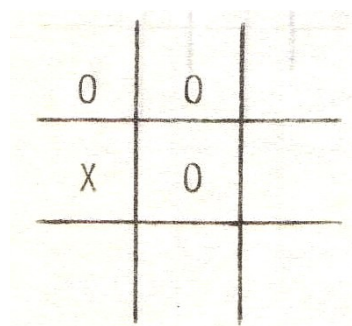
Como (B) dos marcas en la línea recta, (A) debe impedir que coloque una tercera, por esa razón debe jugar así:

CUARTA JUGADA



De no haberlo hecho y suponiendo que juegue así:

CUARTA JUGADA



podido jugar así:

QUINTA JUGADA

X	0	
X	0	
	0	

Bueno, ya conoce el juego. Busque ahora una estrategia que le permita ganar.

Ponga una condición que usted es el primer en jugar.

La encontró? Supongamos que su estrategia sea jugar siempre a la izquierda y en la casilla más alta posible.

PRIMERA JUGADA

0		

SEGUNDA JUGADA

0		

TERCERA JUGADA

0		
0	X	

CUARTA JUGADA

0		
0	X	
X		

QUINTA JUGADA

0	0	X
0	X	
X		

on

perder. Examinemos

PRIMERA JUGADA

0		

SEGUNDA JUGADA

0		
		X

TERCERA JUGADA

0		
0		X

CUARTA JUGADA

0		
0		X
X		

QUINTA JUGADA

0	0	
0		X
X		

SEXTA JUGADA

0	0	X
0		X
X		

SEPTIMA JUGADA

0	0	X
0	0	X
X		

OCTAVA JUGADA

0	0	X
0	0	X
X		X

También pierde, verdad?

La estrategia anterior parece no ser la estrategia ÓPTIMA.

Para determinar la estrategia óptima analicemos un poco las posibilidades con que se puede contar en cada casilla.

Para facilitar la descripción le colocamos un número a cada casilla quedando entonces así:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Existen casillas a partir de las cuales me es posible formar (2) líneas para ganar, como se observa en la figura siguiente:

CASILLA (2)

0		
0	0	0
0		

CASILLA (4)

0	0	0
	0	
	0	

CASILLA (6)

	0	
	0	
0	0	0

CASILLA (8)

		0
0	0	0
		0

P

; con (3) probabilidades. Veámoslas:

CASILLA (3)

0		0
0	0	
0	0	0

CASILLA (7)

0	0	0
	0	0
0		0

CASILLA (9)

0		0
	0	0
0	0	0

Lógicamente la estrategia ÓPTIMA debería ubicar las marcas preferiblemente en las casillas que poseen (3) probabilidades, es decir en las casillas de las esquinas. Será la ESTRATEGIA de las esquinas, la ESTRATEGIA ÓPTIMA?

JUEGO

Realicemos algunos ejemplos:

PRIMERA JUGADA

		X
X		

CUARTA JUGADA

	0	0
0		0
X		X

SEGUNDA JUGADA

	0	

QUINTA JUGADA

X	0	0
0		0
X		X

TERCERA JUGADA

0	0	0

SEXTA JUGADA

X	0	0
0		0
X		X

Como

SEPTIMA JUGADA

X	0	0
0		
X	X	X

Gané, verdad? Ganaré para las otras situaciones? Veamos:

PRIMERA JUGADA

X		

SEGUNDA JUGADA

X		
		0

TERCERA JUGADA

X		
		0
X		

CUARTA JUGADA

X		
0		0
X		

QUINTA JUGADA

X		X
0		0
X		

SEXTA JUGADA

X		X
0	0	0
X		

Aquí apliqué la estrategia de la esquina y perdí. Si hubiera hecho una modificación a mi estrategia diciendo que debo jugar a las esquinas siempre que pueda, es decir, cuando mi oponente no esté a punto de formar una línea, en cuyo caso debería ubicar mi jugada en la casilla que lo impide, hubiera ganado. Veámoslo:

QUINTA JUGADA

X		
0	X	0
X		

SEXTA JUGADA

X		
0	X	0
X		0

SÉPTIMA JUGADA

X		X
0	X	0
X		0

ganar en otra situación? Veamos:

PRIMERA JUGADA

		X

SEGUNDA JUGADA

		X
0		

TERCERA JUGADA

		X
0		X

CUARTA JUGADA

		X
O		O
		X

QUINTA JUGADA

		X
O	X	O
		X

SEXTA JUGADA

O		X
O	X	O
		X

SEPTIMA JUGADA

O		X
O	X	O
X		X

Si, verdad? Estos dos ejemplos son suficientes para ilustrar que aplicando la estrategia de jugar a las esquinas cada vez que se pueda, nunca pierdo, la pregunta que viene ahora es: será posible que con ella, siempre gane? Veamos un ejemplo:

PRIMERA JUGADA

X		

SEGUNDA JUGADA

X		
	O	

TERCERA JUGADA

X		
	O	
X		

CUARTA JUGADA

X		
O	O	
X		

QUINTA JUGADA

X		
O	O	X
X		

SEXTA JUGADA

X	O	
O	O	X
X		

SEPTIMA JUGADA

X	O	
O	O	X
X	X	O

OCTAVA JUGADA

X	O	
O	O	X
X	X	O

NOVENA JUGADA

X	O	X
O	O	X
X	X	O

Como se vé, aquí no gané ni perdí, quedé empatado. No logré ganar porque mi oponente aplicó la única estrategia que puede neutralizar la estrategia de las esquinas: la estrategia de la casilla del centro. La casilla del CENTRO es una casilla clave por que a través de ella se puede formar ya no (3) líneas sino (4).

	O	
O	O	O
	O	

		O
	O	
O		

O		
	O	
		O

En síntesis, en este juego no existe una estrategia perfecta en la cual siempre pueda ganar. Existe sí una estrategia OPTIMA, que en este caso me permite no perder nunca, es decir, ganar o quedar empatado.

En la vida social casi nunca existe una estrategia perfecta, pero siempre existe una estrategia óptima aunque con frecuencia no es fácil de hallar. Sin embargo, hartos ganaríamos si siempre que nos enfrentemos a un problema intentáramos solucionarlo por lo menos en la estrategia menos "PIOR" que podamos. Eso ya sería bastante, verdad?

EL PROBLEMA DE LAS "PINTAS"

Dado que el concepto de ESTRATEGIA OPTIMA es muy importante, vamos a detenernos un poco más en él presentando un problema al que los grupos de izquierda deben enfrentarse frecuentemente ante la imposibilidad de acceso a los medios masivos de comunicación: el problema de las "pintas" en las paredes.

Supongamos que existe una célula compuesta por tres (3) militantes los cuales deben escribir consignas en (5) lugares de la ciudad. Si pueden gastar un máximo de \$600 para el transporte y los precios de las movilizaciones son los que se presentan a continuación, a dónde debería ir cada militante para que la célula pueda realizar el máximo de pintas, en el máximo de lugares y con la menor inversión de dinero?

	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5
Dinero que costaría la movilización de (A) para ir hasta:	\$100	\$200	\$50	\$90	\$100

	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5
Dinero que costaría la movilización de (B) para ir hasta:	\$20	\$100	\$60	\$300	\$70

	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5
Dinero que costaría la movilización de (C) para ir hasta:	\$10	\$200	\$60	\$100	\$40

RESUELVE EL PROBLEMA

Vamos a ver con qué estrategia se podría determinar la ruta ÓPTIMA.

Primer Paso

Lo primero que debemos hacer es hallar el costo mínimo para hacer una pinta en cada lugar, la cual obviamente deberá ser realizada por el militante al que le cueste al menos la movilización a ese lugar.

Dicho resultado lo podemos apreciar en la siguiente tabla:

Militante \ Lugar	1	2	3	4	5
A			50	90	
B		100			
C	10				40

Segundo Paso

Hallamos el costo mínimo de la movilización para realizar (1) pinta en cada lugar en el cual se encuentra sumando los costos seleccionados en el primer paso. Es decir:

$$\$10 + \$100 + \$50 + \$90 + \$40 = \$290$$

Tercer Paso

Ahora debemos encontrar cuanto dinero nos quedaría disponible como máximo para realizar otras pintas. Este total se halla restando 10 ya gastado, \$290, del total que tenemos \$600. Por consiguiente nos queda un excedente de $\$600 - \$290 = \$310$.

Cuarto paso

A continuación debemos distribuir el excedente. Para ello seleccionamos las casillas de costo mínimo aunque se encuentren en una misma columna y aunque se queden lugares sin cubrir. Aplicando esta regla nos queda lo siguiente:

Militante \ Lugar	1	2	3	4	5
A					
B	\$20		\$60		\$70
C			\$60	\$100	

Quinto Paso

Sumamos para ver a cuánto asciende esta nueva inversión y saber si alcanza a ser cubierta con el excedente del que disponíamos.

$$\$20 + \$60 + \$60 + \$100 + \$70 = \$310$$

Como se puede observar nos dió exacto. Sin embargo, hubiera podido faltar o sobrar. Si falta, debemos excluir el mayor de los costos y si sobra, debemos seleccionar otro costo que a su vez se represente el menor dentro del conjunto disponible.

En definitiva la ruta óptima que se debe seguir es:

Lugar Militante	1	2	3	4	5
A			X	X	
B	X	X	X		X
C	X		X	X	X

Es decir, (A) debe ir a los lugares (3) y (4)
 (B) debe ir a los lugares (1), (2), (3) y (5) y
 (C) debe ir a los lugares (1), (3), (4) y (5).

En el ejemplo anterior hemos reflexionado sobre cómo hallar la estrategia, los pasos para determinar la ruta que nos permite maximizar nuestra tarea. Situaciones similares a ésta se nos presentan con mucha frecuencia en nuestro trabajo popular. Aunque la realidad casi nunca es tan "simple", sería muy útil tener presente lo aprendido en el ejercicio anterior: que existe la posibilidad de hallar una estrategia, "de hallarle la comba al palo".

ESTRATEGIA MINIMAX

"Si le preguntáramos a un teórico de juegos cuál P.S el mayor aporte que ésta rama de las matemáticas ha hecho, sin duda nos contestaría que es el TEOREMA DE MINIMAX de Van Neumann", nos dice Morton Davis¹. En qué consiste este teorema? Nuevamente como nuestra estrategia didáctica consiste en que usted intente contestar primero, vamos a proponerle un problema.

El dilema del prisionero

¹ Morton, Davis. "Teoría del Juego". Alianza Editorial, pg. 56

Supóngase que una pareja de delincuentes cae prisionera. A ambos los interrogan por separado; las posibles soluciones del "juego" son las siguientes:

Si A habla y dice la verdad y B habla y dice la verdad, entonces ambos van a la cárcel por 20 años.

Si A se queda callado y B también, entonces van a la cárcel por un año.

Si A se queda callado y B habla, entonces B le echa la culpa a A y A vá a la cárcel por 10 años y B queda libre.

Si B se queda callado y A habla, le echa la culpa a B entonces B va a la cárcel por 10 años y A queda libre.

Qué debería hacer A? Hablar o quedarse callado?

JUEGUELO

Para facilitar el análisis de la respuesta vamos a hacer una tabla con los datos del juego (lo que se llama matriz de pagos)

	B habla	B se queda callado
A habla	A (20), B (20)	A (libre), B (10)
A se queda callado	A (10), B (libre)	A (1), B (1)

Muy probablemente lo primero que usted decidió para A fue hablar, pues si habla tiene la posibilidad de quedar libre, cosa que no sucede si se queda callado.

Hablar parece ser la mejor estrategia, el camino a través del cual puedo lograr el MAXIMO DE GANANCIA que en este caso consiste en quedar' libre; pero hay un problema: si A habla y B también, A tendrá la MÁXIMA PERDIDA, ir 20 años a la cárcel. De modo que si A decide hablar, selecciona una estrategia con cuál puede tener el máximo de ganancia pero al mismo tiempo puede tener el máximo de pérdida. Es una estrategia óptima de muy alto riesgo, casi que se trata de todo o nada.

Analicemos ahora la estrategia "quedarse callado". Si A queda callado nunca podrá quedar libre pero recibirá una pena de 10 años ó de un (1) año, las cuales son inferiores a 20 que le esperarían en las alternativas anteriores. 10 ó 1 año no son la máxima ganancia pero son la mínima pérdida. Es posible que ahora usted crea que la mejor estrategia no sería MÁXIMA GANANCIA - MINIMA PERDIDA, si

no una más conservadora, MÁXIMA GANANCIA con MINIMA PERDIDA, es decir, quedarse callado. Veamos otro ejemplo:

El juego de las tres cartas

En un juego de dos (2) jugadores cada uno de ellos posee 3 cartas, las cuales tienen marcado el número (1), el número (2) o el número (3).

Cada jugador debe sacar una carta; a continuación deben sumar los números que aparecen en cada una de las cartas, Si el resultado es un número par, entonces gana A. Si el resultado es impar, gana B. En ambos casos el jugador que pierde debe pagar el total de la suma, por ejemplo: si A saca 3 y B saca 1, la suma es 4 y como 4 es un número par, B debe pagarle a A, \$4. Si solo se puede jugar una vez, qué carta sacaría usted?

..... JUEGUELO

Eligió la carta con el número 3? Si lo hizo ha captado todavía la esencia del teorema del MINIMA. Analicemos el juego, la tabla de pagos nos quedaría así:

A	B	Total	Ganador
1	1	2	A
1	2	3	B
1	3	4	A
2	1	3	B
2	2	4	A
2	3	5	B
3	1	4	A
3	2	5	B
3	3	6	A

Como se puede desprende de la tabla anterior:

Si A escoge 1, puede ganar un máximo de 4, y perder un máximo de 3.

Si A escoge 2, puede ganar un máximo de 4, y perder un máximo de 5.

Si A escoge 3, puede ganar un máximo de 6, y perder un máximo de 5.

Es decir, seleccionando la carta con el número 3, puede obtener el máximo de ganancias pero también el máximo de pérdidas.

Seleccionando (2), (4) o (6), puede obtener el máximo de pérdida (5) y una ganancia de (4). Seleccionando (1), puede obtener el mínimo de pérdida (3) con una ganancia de (4). Lógicamente la mejor estrategia no es (3), pues con ella me

arriesgo a obtener el máximo de pérdida, sino (1), pues ella es la que me da el mínimo de pérdida. En conclusión: existen situaciones donde lo mejor es coger la estrategia que me permite lograr el MAXIMO DE GANANCIA con el MINIMO DE PERDIDA. Esa estrategia es la estrategia MINIMAX. Cuántas veces en la vida real cuando tomamos decisiones para resolver un problema le apostamos al número (3), es decir, seleccionamos una estrategia de alto riesgo cuando quizá lo más eficaz es jugar con el minimax?

ESTRATEGIA OPTIMA POSIBLE

Existen casos donde la estrategia óptima no es posible de seleccionar por las restricciones dadas, entonces se debe optar por la estrategia óptima dentro de lo posible". Coloquemos un ejemplo: supóngase que tomamos el problema de las "pintas" pero con la limitación de que una persona no puede ir a más de tres lugares. Nos quedaría entonces así:

Primer paso

Militante	Lugar	1	2	3	4	5
A				\$50	\$90	
B			\$100			
C		\$10				\$40

Segundo paso

El costo de la movilización para realizar una pintura en cada uno de los lugares sería igual que en el costo anterior (\$290)

Tercer paso

El excedente para invertir sería de $\$600 - \$290 = \$310$.

Cuarto paso

Aquí la situación cambia en relación al primer caso pues para obtener la estrategia óptima se requiere que tanto B como C fueran a 4 lugares, decisión que no cumple con las restricciones dadas. Por eso los valores que debemos seleccionar son:

Militante	Lugar	1	2	3	4	5
A						\$100
B		\$20				\$70

C				\$100	
----------	--	--	--	-------	--

Si sumamos el costo de las últimas movilizaciones tendríamos:

$$\$20 + \$100 + \$50 + \$90 + \$40 = \$290$$

Como se puede observar, el total invertido es inferior a lo que podríamos gastar (\$310), quedándonos todavía un excedente de:

$$\$310 - \$290 = \$30$$

Sin embargo no podemos emplearlo por las limitaciones concretas impuestas.

PUNTOS DE EQUILIBRIO

Seguramente cuando pequeño usted jugó muchas veces el juego llamado piedras-papel-tijeras, el cual consiste en que cada jugador escoge al azar cualquiera de las tres opciones y los dos las dan a conocer al mismo tiempo; el criterio para calificar el resultado es que piedra le gana a tijeras, tijeras le gana a papel y papel le gana a piedra. Pues bien, para trabajar el concepto de puntos de equilibrio vamos a realizar dicho juego pero con una modificación, vamos a acordar que:

- a) tijeras le gane a papel
- b) piedra le gane a tijeras
- c) piedra le gana a papel

Qué estrategia cogería? Seleccionaría piedra, papel o tijeras?

JUEGUELO

Para analizar el juego vamos a realizar su tabla de pagos.

		JUGADOR B		
		PIEDRA	PAPEL	TIJERAS
JUGADOR A	PIEDRA	Empatados	Gana A	Gana A
	PAPEL	Pierde A	Empatados	Pierde A
	TIJERAS	Pierde A	Gana A	Empatados

En la tabla anterior vemos que por ejemplo si A selecciona piedra y B papel, gana A y si A selecciona piedra y B tijeras, gana A.

Es obvio que la estrategia de A sería seleccionar siempre piedra, verdad? Pero y las de B? Pues también, es decir, que siempre terminaría empatados. La estrategia jugar piedra, sería la estrategia minimax para ambos jugadores. Cualquiera podría apartarse de ella pero al mismo tiempo que tendría la posibilidad de ganar, correría el riesgo de perder.

A podría jugar por ejemplo tijeras y ganar en el caso de que B escoja papel, pero también podría perder en caso de que B escoja piedra. A ningún jugador le conviene entonces apartarse de la estrategia minimax porque si el otro no le hace, nunca puede ganar, en el mejor de los casos su ganancia será igual (empatar) y en el peor su pérdida sería mayor (perder).

Cuando ambos jugadores seleccionan siempre su estrategia minimax, se dice que el juego entra en una posición de equilibrio.

No siempre los puntos de equilibrio favorecen por igual a los dos jugadores. Depende de las características del juego. Sin embargo, el jugador que pierde tendrá que seguir siempre su estrategia minimax para minimizar sus pérdidas y entonces habrá también un punto de equilibrio, en el sentido de las estrategias de ambos jugadores serán siempre las mismas. Estos puntos de equilibrio también se llaman PUNTOS DE SILLA DE MONTAR².

Ha vivido usted situaciones similares a las planteadas en el juego anterior en su práctica política? Cite ejemplos.

ESTRATEGIA MIXTA

Otra vez "piedra – papel - tijeras"

Regresemos al juego de "piedra-papel-tijeras" pero esta vez con sus reglas originales, es decir:

- a) papel le gana a piedra
- b) piedra le gana a tijeras
- c) tijeras le gana a papel

Qué estrategia cogería? Seleccionaría piedra, papel o tijeras?

JUEGUELO

² Robert J. Thieruf y Richard A. Grosse. Toma de decisiones por medio de INVESTIGACION DE OP-RACIONES. Editorial Limusa, pág. 374.

Antes de analizar el juego de “piedras – papel - tijeras” facilitar la comprensión de la estrategia mixta, vamos a trabajar otro problema.

Edgar Allan Poe, un famoso literato inglés, analizó el de "pares" y "nones" en su obra "La Carta Robada". Veamos lo hizo:³

Yo conocí a un chico de unos ocho años cuyo éxito de adivinación en el juego de "pares y nones" atraía la admiración de todos. El muchacho a quien me refiero ganó todas las canicas del colegio. Desde luego él tenía un sistema de adivinar; este sistema se basaba siempre en simple observación y medida justa de la astucia de sus oponentes. Por ejemplo, un redomado compañero es su contrincante, y levantando su puño pregunta: ¿pares o nones? Nuestro colegial responde, "nones" y pierde; pero al segundo intento gana; pues entonces se dice así mismo, el bobalicón tenía pares en la primera jugada y su sagacidad es justamente lo suficiente para que tenga nones en la segunda; por lo tanto creo que será así -acierta y gana-o Ahora bien, con un bobalicón un grado por encima del primero, hubiese razonado así:

Es te amigo sabe que en el primer caso yo pensé en “nones” y en el segundo él se propondrá de primera intención una simple variación de “pares” a “nones” como lo hizo el primero, pero después una segunda reflexión le sugerirá que esto es una variación demasiado sencilla y finalmente decidirá sacar “pares” como lo hizo anteriormente. Por consiguiente supondrá par -acierta con “pares” y gana-. Ahora bien, esta forma de razonar del colegial a quien sus amigos denominan ‘afortunada’, qué es en último análisis?

Es sencillamente, dije yo, una identificación del intelecto del razonador con el de su oponente.

Eso es, dijo Dupin; y preguntando al muchacho por qué medio realizó la perfecta identificación en la que consistía su éxito, recibí la respuesta siguiente: ‘Cuando deseo averiguar lo inteligente, estúpido. bueno o malvado que es alguien, o cuáles son sus pensamientos en un momento dado, ajusto la expresión de mi cara, tan exactamente como sea posible, a la de la suya, y entonces espero para ver qué pensamientos o sentimientos surgen en mi mente o corazón, de modo que estén de acuerdo o se correspondan con la expresión’.

Como poeta razonaría bien, como un simple matemático no.

Será más fácil valorar el método para este problema si lo examinamos primeramente un poco más. Supongámonos dentro de los zapatos de un colegial que fuese enfrentado al extraordinario niño prodigio de Poe.

³ Tomado de Morton Davis. Obra citada, pago 45.

En lugar de intentar imaginar el poder de penetración del niño prodigio, imaginemos que usted supone lo peor: el niño es tan inteligente que puede anticipar su pensamiento en cada tirada. En este caso poco importa lo que usted haga. Si usted escoge pares o impares el resultado será el mismo: la pérdida de una canica. ¿Hay alguna oportunidad de hacerlo mejor?

Usted puede hacerlo, mejor a pesar de la inteligencia de su oponente. Irónicamente, el medio de lograrlo es no pensar; para ver por qué, retrocedemos un poco.

Dijimos antes que, como elector, usted tiene solamente estas alternativas: coger un número par de las canicas o un número impar.

Hay muchas formas en las que puede hacer esta elección. Y aunque pudiera parecer que lo que decide es lo que importa y no es importante cómo lo decido, esto último es realmente decisivo. Desde luego, usted puede siempre tomar unas de las estrategias puras: impar o par; pero también puede usar un artificio de azar tal como un dado o rueda de ruleta que haga la decisión por usted. Concretamente, puede lanzar un dado y si sale seis elegir par y en caso contrario elegir impar. Una estrategia que requiere la selección de una estrategia pura mediante la selección de un artificio de azar se llama una estrategia mixta.

Supongamos que usted juega par la mitad del tiempo; puede lanzar una moneda y lanzar impar siempre que salgan caras. Supongamos que el niño prodigio lo adivina o que usted se lo dice. No hay nada más que él pueda saber de usted ni siquiera usted sabe más. Tampoco, a menos que tenga poderes soñados por Poe, puede predecir el resultado del lanzamiento casual de una moneda. Si usted elige esta estrategia mixta, el resultado será el mismo con independencia de lo que haga su oponente; esto es, cada uno ganará, como promedio, la mitad de las veces.

Resumiendo: usted ha tomado un juego en el que aparentemente está a merced de su oponente inteligente y lo ha transformado en uno en el que su oponente no tiene esencialmente control sobre el resultado. Pero, si usted logra esto cuando descubre su estrategia ¿no lograría mejor resultado si se la guarda para usted?. No, usted no puede lograr más y resulta claro porqué: su oponente puede hacer lo mismo que usted ha hecho. Puede también, empleando un artificio al azar, asegurar una probabilidad igual de ganar.

Es concebible que un jugador pueda conseguir mejores resultados no "utilizando el azar?". Por ejemplo en el juego descrito por Poe, si un jugador tiene el talento para anticiparse a las elecciones de su oponente, puede intentar explotar esa habilidad. Si su contrincante desconoce el juego del azar (o, equivocadamente, piensa que es más inteligente que usted), puede ser posible explotar su

ignorancia. Pero en el mejor de los casos esto es una ventaja dudosa, pues puede ser siempre neutralizado por un oponente inteligente.

También debe observarse que en el juego de pares o nones, una vez que un jugador recurre al azar, no solamente puede no perder (como promedio) independientemente de lo bien que juegue su contrario pero no ganará, por muy mal que juegue su oponente (tanto más atrayente será el procedimiento del azar).

El razonamiento en el que hemos basado nuestro análisis del juego pares o nones es también aplicable en situaciones mucho más complicadas.

Obviamente la mejor solución del juego piedra-papel-tijeras, también es una estrategia mixta, verdad?

Una aplicación militar

En general (X) pretende atacar una o dos posiciones enemigas (A) y (B); Y el general (Y) debe defenderlas. El general (X) tiene cinco divisiones a su disposición; el general (Y) tiene tres~ Cada general debe dividir todas sus fuerzas en dos partes y asignarlas a estas dos posiciones sin saber lo que hará el enemigo. El resultado viene a determinarse una vez se han elegido las estrategias. El general que asigne el mayor número de divisiones a una posición vencerá allí; si ambos generales envían el mismo número de divisiones, cada uno tendrá en su haber media victoria. Suponiendo que cada general desee maximizar su número esperado de victorias (esto es, el promedio), ¿qué deberá hacer? - ¿Cuál es el resultado esperado? Supóngase que el general (Y) decide jugar una estrategia mixta; esto es, hace la decisión sobre la base de un artificio al azar. Incluso suponemos que el general (X) puede adivinar la naturaleza del artificio al azar (las probabilidades de seleccionar cada estrategia), pero no el resultado real "de lanzar una moneda o del giro de la rueda.

Resulta claro desde el principio que si el general (X) se encierra en una estrategia pura y el general (Y) se lo imagina, cada uno logrará una victoria. Cuando cinco divisiones se distribuyen entre dos posiciones deberá haber dos o menos divisiones en una de aquellas. Si el general (Y) envía sus tres divisiones al sitio donde el general (X) envió su menor fuerza, ganará justamente una victoria (y no hay manera que pueda mejorar el resultado) .

Pero supongamos ahora que el general (X) usa el azar, no importa lo que haga el general (Y). El resultado será el mismo: El general (Y) logrará un promedio mayor de victorias.

Solución matemática del juego pares o nones.

Aunque este libro, tal como lo decía en la introducción, no tiene matemáticas para facilitar su difusión, vamos sin embargo a presentar una solución matemática al juego de pares o nones por que es muy simple y no rebasa los conocimientos de algebra de un estudiante de secundaria.

Primero consideraremos la tabla de pagos del juego:

		JUGADOR B	
		Pares	Nones
JUGADOR A	Pares	Gana A	Pierde A
	Nones	Pierde A	Gana A

Para facilitar el análisis vamos a traducir.

Ganancia de A, por (-1), pues A pierde una (1) bola. La tabla de pagos nos quedaría entonces así:

		JUGADOR B	
		Pares	Nones
JUGADOR A	Pares	1	-1
	Nones	-1	1

veces que B juega i
tabla (matriz) de pagos:

$$(1) \times (p_p) + (-1) \times (p_n)$$

$$(-1) \times (p_p) + (1) \times (p_n)$$

Ahora bien, como el número de veces que debo coger pares más el número de veces que debo coger impares debe ser igual al ciento por ciento (100%), puedo decir que:

$$P_p + P_n = 1$$

de donde a su vez puedo despejar por ejemplo P_p quedando:

$$P_p = - P_n$$

Dado que teníamos dos valores para (v) y que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$(I) \times (P_p) + (-1) \times (P_n) = (-1) \times (P_p) + (1) \times (P_n)$$

$$P_p - P_n = -P_p + P_n$$

$$\text{Sustituyendo } 2P_p = 2P_n$$

$$2(1 - P_n) = 2P_n$$

$$2 - 2P_n = 2P_n$$

$$2 = 4P_n$$

$$P_n = 2/4$$

$$P_n = 1/2$$

Esto quiere decir que debo jugar impar la mitad de las veces y la otra mitad, par. Esto lo puedo lograr lanzando por ejemplo una moneda.

De forma análoga podríamos encontrar que la estrategia mixta para el juego piedra – papel - tijeras, es seleccionar cada una de las posibilidades las treinta y tres partes del tiempo, es decir, si juego 100 veces, debo escoger piedra (33); tijeras (33) y papel (33), lo que en forma práctica podría resolverse lanzando un dado y diciendo:

Selecciono "piedra", si salen los números 1 ó 6

Selecciono "tijeras", si salen los números 2 ó 5

Selecciono "papel", si salen los números 3 ó 4

y diciendo: si sale "cara, escojo un número par
y si sale "sello", escojo un número impar.

ALIANZAS

Hasta el momento todos los juegos que hemos visto son juegos de dos grupos. Ahora vamos a trabajar los juegos de 3 grupos.

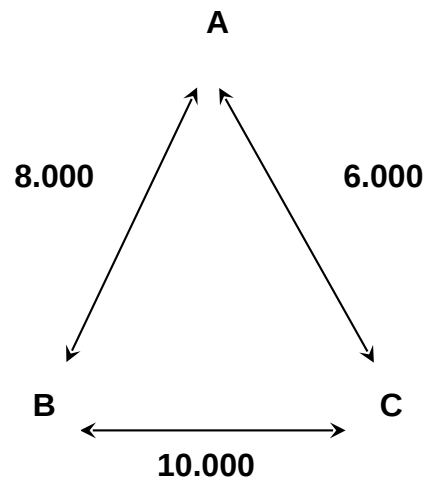
Supongamos que en una población existen tres grupos de izquierda que irán a elecciones; si los grupos no pueden ir solos, porque no alcanzarían a sacar ningún representante y si los valores de las posibles alianzas son los que se presentan en la tabla que aparece a continuación, cuál cree usted que sería la alianza definitiva?

Si A y B se alían, entre los dos sacarían 6.000 votos.

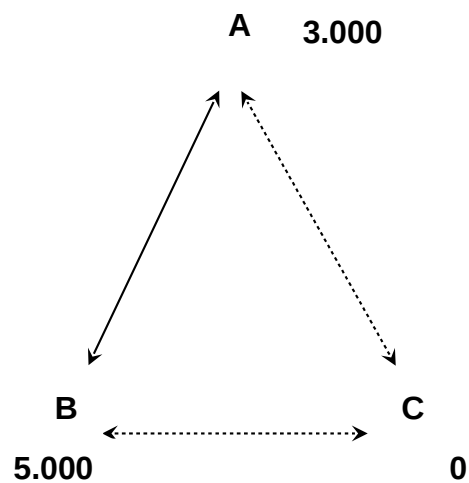
Si A y C se alían, entre los dos sacarían 8.000 votos.
Si C y B se alían, entre los dos sacarían 10.000 votos.

JUEGUELO

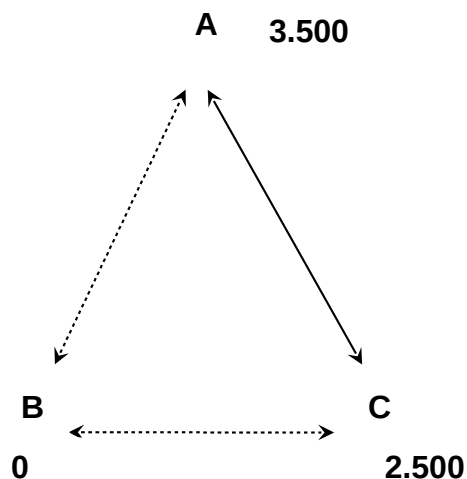
Analicemos el juego. Para facilitar la visualización vamos a hacer un diagrama.



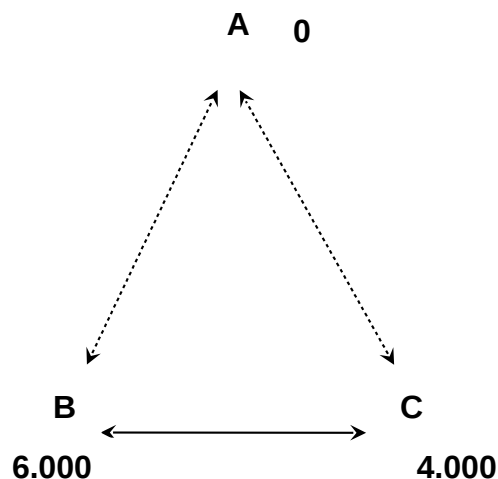
Supongamos que se realiza una alianza entre A y B; el primer problema que se presenta, es decidir cuántos votos quedarían para y cuántos para B; supónganos que B coje 5.000 y le deja a A 3.000. Es decir:



El grupo C, al ver la posibilidad que quedar por fuera, de sacar cero (0) votos, puede decidir proponerle a A una alianza donde A quedaría con 3.500 y C con 2.500. esta alianza les conviene a los dos pues C se iba a quedar sin nada y A ahora podría obtener 500 votos más que se insiste en su alianza con B. expresando gráficamente puede ser así:



Estará resuelto el problema? No, ni mucho menos, pues ahora B, al ver que puede quedarse con cero votos puede ofrecerle a e por ejemplo. 4.000 votos y quedarse con 6.000. Nuevamente esta alianza le convendría tanto a B. que se iba a quedar por fuera, como a C, que ahora puede lograr 1.000 votos más que si se alía con A. Expresado gráficamente quedaría en:



La situación puede volver a enredarse ya que A al verse por fuer~ puede decidir replantear su alianza con B. por ejemplo.

Ofreciéndole 7.000. De esta forma A lograría obtener 1.000 votos, que son preferibles a quedarse con cero.

Esto podría repetirse indefinidamente? Teóricamente sí, en la práctica seguramente se llegará a una alianza. Pero qué podemos nosotros, desde el análisis conceptual, predecir? Por ahora res ponderemos con una propuesta que no resuelve a fondo el problema. Diremos qué cantidad de votos debería obtener cada uno de los grupos en el caso de que se realizara una alianza. Entienda se bien que se asume que se real izará una alianza sin decir cuál será. Nosotros sabemos que:

$$\text{Primera ecuación } A + B = 6.000$$

$$\text{Segunda ecuación } A + C = 8.000$$

$$\text{Tercera ecuación } C + B = 10.000$$

Despejando A de la primera ecuación tenemos:

$$A = 6.000 - B$$

Sustituyendo el valor de A en la segunda ecuación tenemos:

$$(6.000 - B) + C = 8.000$$

$$6.000 - B + C = 8.000$$

$$6.000 + C - 8.000 = B$$

Sustituyendo B en la tercera ecuación tenemos:

$$C + (6.000 + C - 8.000) = 10.000$$

$$C + 6.000 + C - 8.000 = 10.000 \quad 2C - 2.000 = 10.000$$

$$2C = 10.000 + 2.000$$

$$2C = 12.000$$

$$C = 12.000/2$$

$$C = 6.000$$

Conociendo el valor que le correspondería a C, podemos entonces sustituirlo en la tercera ecuación obteniendo:

$$C + B = 10.000$$

$$6.000 + B = 10.000$$

$$B = 10.000 - 6.000$$

$$B = 4.000$$

Ya con los valores de B nos queda muy fácil obtener A. Basta reemplazar el valor de B en la primera ecuación obteniendo:

$$\begin{aligned}
 A + B &= 6.000 \\
 A + 4.000 &= 6.000 \\
 A &= 6.000 - 4.000 \\
 A &= 2.000
 \end{aligned}$$

Como se ve, no hemos dicho qué alianza se formará. Será posible anotar algo más sobre estos aspectos? Antes de contestar veamos otro juego.

Supongamos ahora que los grupos A, B y C pueden aliarse de las siguientes maneras:

A – B – C	obteniendo un resultado de 120.000 votos.
A – B	obteniendo un resultado de 100.000 votos.
A – C	obteniendo un resultado de 100.000 votos.
B – B	obteniendo un resultado de 100.000 votos.

Cuál cree que será la alianza que se formará?

JUEGUELO

Este juego puede resolverse de dos maneras. La primera sería con una estrategia “romántica” en la cual todos los grupos participarán en la alianza y cada uno se quedaría con la tercera parte de los- votos, es decir, con $(120.000) / (3) = 40.000$. Esta es una estrategia conciliadora donde se decide que es mejor algo para todos, que mucho para algunos. La segunda en cambio, es una estrategia más agresiva y quizá más semejante a la realidad; en ella se realiza una alianza entre dos grupos dejando por fuera a uno. Los aliados tendrían entonces una votación individual mayor que en el caso anterior, pues les podrá corresponder $(100.000) + (2) = 50.000$ En esta estrategia se decide que es mejor mucho a algunos, que todo a todos.

Y es todo cuanto se puede decir desde la teoría. No es posible predecir cuál será la alianza, sólo se pueden suministrar algunas características de ellas. Los juegos de tres personas no tienen solución teórica.

Hemos visto en forma global:

- Los juegos de dos grupos donde laque se gana uno, lo pierde el otro (solo hay un ganador) y donde los jugadores están perfectamente informados como el caso de los 9 fósforos. Estos juegos se denominan bipersonales, de suma cero y de información perfecta.

- b) Juegos donde lo que se gana un jugador lo pierde el otro y no posee información sobre lo que va a hacer el oponente los cuales se llaman también bipersonales, de suma cero y de información imperfecta.
- c) Juegos donde ambos jugadores pueden perder y no poseen información completa sobre el oponente como en el caso del minimax, en el dilema del prisionero. Este tipo de juego se conoce con el nombre de juegos bipersonales, de suma diferente de cero y de información imperfecta.
- d) Juegos de tres jugadores.

No hemos dado más porque este libro se propone sino divulgar en forma muy simple algunos conceptos de la teoría del juego, específicamente el de estrategia, con el fin de que los grupos que trabajan en Educación Popular se inquieten por apropiarse de instrumentos que les permitan superar los métodos artesanales de trabajo político.

Creemos en síntesis, que como dice Morgenstern, uno de los grandes teóricos de esta disciplina:

La teoría se encuentra en una fase de activo desarrollo... sin embargo ya ha comenzado a afectar a las ciencias sociales, debido a que la estructura matemática de esta teoría difiere profundamente de los intentos previos por proporcionar bases matemáticas a la realidad social, los cuales eran inspirados en las ciencias físicas... Sin tener en cuenta que los hombres actúan de una forma diferente: unas veces cooperando y otras en contra.